

ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРИМЕРОВ

*Н. Г. Лехтинен**

Бергенский Университет, г. Берген, Норвегия

Стример — это вид электрического разряда, при котором образуется столб ионизированной материи, растущий за счёт усиленного поля на его конце. Стримеры в воздухе являются важной стадией искрового разряда, в частности молнии, и образуют спрайты (разряды в мезосфере). Стримеры в больших разрядах (в спрайтах, в лабораторных экспериментах с метровым межэлектродным промежутком и мегавольтным напряжением, в молнии) создают большие разветвлённые структуры. За распространение стримеров отвечают микроскопические процессы: ионизация, прилипание, дрейф и диффузия электронов, фотоионизация, ионные процессы (отлипание, рекомбинация и т. д.). Их численное моделирование воспроизводит колоннообразную форму ионизационного фронта, но не позволяет идентифицировать физические и математические механизмы выбора радиуса, скорости стримера и ветвления. Стример можно описать конечным набором параметров, таких как скорость и радиус головки. Соотношения между этими параметрами известны, но не составляют полной системы уравнений: остаётся один свободный параметр (радиус), задающий стримерную «моду» (терминология выбрана по аналогии с малыми поперечными гармоническими возмущениями плоского ионизационного фронта). В качестве дополнительного требования, дающего однозначное решение, мы предлагаем выбор наиболее неустойчивой моды, обладающей максимальной скоростью. Таким образом, мы рассматриваем стример как нелинейную неустойчивость. Такой подход даёт результаты, согласующиеся с экспериментальными измерениями скорости, а также порогового электрического поля для распространения стримеров.

Статья написана по материалам лекции, представленной на XIX Научной школе «Нелинейные волны».

ВВЕДЕНИЕ

Стримеры — это каналы повышенной ионизации в газе (или жидкости), которые распространяются, ионизируя материю впереди себя повышенным полем на конце. Они играют важную роль как в природе, так и в промышленности. В природе они являются важной стадией молнии, а также образуют спрайты (разряды в мезосфере). В промышленности они могут использоваться для создания сверхтепловых электронов (т. е. электронов с энергиями, превышающими 1 эВ). Стримеры в воздухе представляют особый интерес, и эта статья посвящена именно им. Они изучаются в лабораторных экспериментах с межэлектродными промежутками, варьирующимися от нескольких сантиметров [1] до метров. В больших лабораторных разрядах, с межэлектродным промежутком около 1 м и напряжением порядка 1 МВ, они создают сложные разветвлённые структуры [2, рис. 8]. Временную последовательность разветвления стримеров в спрайтах можно наблюдать при помощи скоростных видеокамер.

В длинных искрах (молнии) можно выделить иерархию процессов, от более простых и с малым масштабом к более крупным и вовлекающим дополнительные физические механизмы.

1. Электронная лавина. При этом происходит таунсендовский разряд. Пространственным зарядом можно пренебречь. Электроны нагреваются, но плохо передают энергию молекулам (атомам в инертных газах) и ионам.

2. Стримеры. Лавина вырастает до определённой величины, и пространственный заряд начинает играть важную роль (критерий Мика) [3]. Электроны нагреты (типичная энергия около 3,6 эВ), но нейтральные молекулы остаются холодными.

* nikolai.lehtinen@uib.no

3. Лидеры. Как и стримеры, это тоже каналобразный разряд. Стримеры сливаются и проводят сильный ток. Нейтральные молекулы нагреваются, происходит сильная ионизация.

В последнее время большое внимание уделяется изучению недавно открытого рентгеновского излучения от электрических разрядов. Земные гамма-вспышки были открыты инструментами BATSE на CGRO [4] и наблюдались другими, более чувствительными инструментами на орбите: RHESSI, Fermi, AGILE, ASIM (примерно 1 вспышка в день). Их характеризует длительность около 0,1 мс и полная энергия больше или порядка 1 кДж. Вспышки происходят одновременно с молниями и, предположительно, создаются лавинами релятивистских убегающих электронов в результате тормозного излучения. Характерный потенциал для роста лавины — 7,4 МэВ.

Рентгеновские лучи также наблюдались в лабораторных экспериментах, как в положительных, так и отрицательных разрядах [5, 6]. Типичные энергии гамма-фотонов достигают величин порядка 100 кэВ. При этом лавина релятивистских убегающих электронов невозможна (недостаточен потенциал). Есть гипотеза, что излучение происходит в процессе столкновения стримеров или лидеров с противоположными полярностями.

1. ПРОЦЕССЫ В СТРИМЕРАХ

Основные реакции с участием электронов в воздухе включают ударную ионизацию молекул N_2 и O_2 с частотой ν_i и прилипание с частотой ν_a ; диссоциативное прилипание доминирует в сильных полях (двухкомпонентное, число прилипаний в единицу времени пропорционально концентрации нейтральных молекул в атмосфере N_{atm}), а трёхкомпонентное — в слабых (число прилипаний пропорционально N_{atm}^2). Мы будем часто использовать эффективную частоту ионизации

$$\nu_t(E) \equiv \nu_i(E) - \nu_a(E).$$

Эти процессы и другие реакции описаны, например, в [7, гл. 2]. На рис. 1 показаны типичные зависимости ν_i и ν_a от электрического поля [8].

Часто поле пересечения кривых на рис.1 $E_k \approx 3$ МВ/м, при котором $\nu_t = \nu_i - \nu_a = 0$, называют критическим и путают с полем пробоя. Нужно иметь в виду следующее.

1) В таунсендовском разряде, который проходит в стационарных условиях, играет большую роль отлипание электронов от отрицательных ионов, образовавшихся в результате прилипания. Это может вызвать разряд при $E < E_k$.

2) Минимальное поле, в котором возникает стримерный разряд в конечном промежутке, вычисляется при помощи критерия Мика и может превышать E_k , особенно для малых промежутков.

Распространение стримерного ионизационного фронта возможно благодаря следующим механизмам.

1) Дрейф электронов (вперёд для отрицательного стримера) со скоростью $\mathbf{v} = -\mu(E)\mathbf{E}$, где $\mu \approx 0,04 \div 0,05$ м²/В·с — подвижность электронов при типичных полях, связанных со стримерами (напряжённость этих полей превышает 1 МВ/м). Заметим, что в слабых полях подвижность на порядок больше.

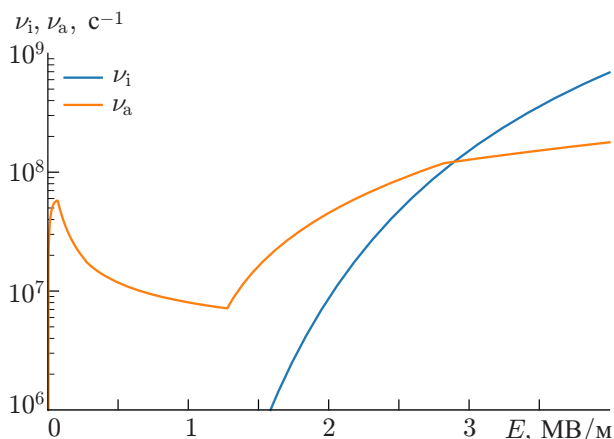
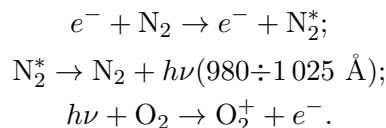


Рис. 1. Основные реакции с участием электронов в воздухе

2) Диффузия электронов (если нет фотоионизации) с коэффициентом $D \approx 0,1 \text{ м}^2/\text{с}$.

3) Фотоионизация (главный механизм в воздухе). Фотоны в ультрафиолетовом диапазоне с длиной волны $\lambda = 980 \div 1\,025 \text{ \AA}$ получаются в результате столкновений электронов с азотом N_2 , затем распространяются вперёд стримера и ионизируют кислород O_2 :



Механизм распространения стримеров в воздухе был впервые предложен авторами книги [3]. Фотоны, возникшие в головке стримера, летят вперёд стримера и вызывают ионизацию. Возникшие электроны выступают в качестве затравки для ионизационных лавин в высоком поле головки. Эти лавины образуются в результате ударной ионизации, идут в направлении назад и сливаются со стримером. Этот механизм работает как для положительных (катодонаправленных), так и для отрицательных стримеров [9, с. 335, 338]. При этом, хотя в отрицательных стримерах лавины, начатые фотоэлектронами, летят вперёд в лабораторной системе отсчёта, стример их догоняет. В системе отсчёта, связанной с головкой, лавины идут назад, так же как и в положительном стримере.

Параметры стримера — его скорость и поперечный размер (радиус) — могут быть измерены экспериментально. Используется также численное моделирование, при котором решаются микроскопические физические уравнения (при условии, что применяемые численные методы устойчивы и точны). Примеры таких методов, требующих больших вычислительных ресурсов, включают гидродинамические трёхмерные модели с адаптивным дроблением сетки [10] и метод частиц в ячейках [11]. Однако до сих пор такие вычисления дают значительные ошибки (около 10 %, судя по примерам в [12]) из-за численных неточностей и неустойчивостей. Результаты, связанные с ветвлением стримеров, особо ненадёжны [13, с. 291]. Более того, такие численные эксперименты даже если они и воспроизводят результаты лабораторных экспериментов, не могут дать ответа на вопрос о физических механизмах, определяющих радиус и скорость стримера.

Вопрос об этих механизмах уже много лет стоит перед физиками [14]. Можно процитировать [7, с. 46–47]: «Механизмы, благодаря которым у плазменного проводника устанавливается определённый, и при том весьма малый ... радиус ..., выходят за рамки стационарных процессов Признаемся сразу — эти механизмы до сих пор не вполне ясны».

Учёные, предложившие механизм стримера [3], также предположили, что начальный его радиус определяется поперечным «расползанием» электронов в лавине в результате диффузии. Это навело многих авторов на мысль, что диффузия электронов также определяет радиус стримера во время его распространения [15–17]. Можно оценить, однако, что увеличение радиуса стримера из-за диффузии происходит гораздо медленнее, чем наблюдается в лабораторных и численных экспериментах. Поперечный размер диффундирующего с коэффициентом D потока со скоростью V растёт как $\sqrt{DL/V}$ с расстоянием L . Подставляя типичные для лабораторных стримеров значения $L \approx 0,1 \text{ м}$, $V \approx 10^6 \text{ м/с}$ и $D \approx 0,1 \text{ м}^2/\text{с}$, мы получаем приращение поперечного размера меньше или порядка 0,1 мм, в то время как обычно наблюдаются радиусы, превышающие 1 мм (см., например, [18–20]). Более того, в работе [21] приводятся аргументы, что диффузией можно пренебречь при приблизительном анализе распространения стримера в типичных условиях.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРИМЕРА

Запишем гидродинамические уравнения для электрического разряда в воздухе (см., например, [8, 22]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}n) + \nabla \cdot (D\nabla n) + (\nu_i - \nu_a)n + \nu_d n_- - \beta n n_+ + s_p; \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} &= \nu_i n - (\beta n + \beta_- n_-)n_+ + s_p; & \frac{\partial n_-}{\partial t} &= \nu_a n - \nu_d n_- - \beta_- n_+ n_-; \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (n_+ - n - n_-). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь n , n_+ , n_- — концентрации электронов, положительных и отрицательных ионов соответственно, ν_i , ν_a , ν_d , β , β_- — коэффициенты, определяющие время ионизации, прилипания, отлипания, рекомбинации электронов с ионами и рекомбинации ионов с ионами соответственно, s_p — фотоионизация, задаваемая уравнением [23]

$$s_p(\mathbf{r}) = \int CF(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \nu_i(|\mathbf{E}(\mathbf{r}')|) n(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'.$$

Нелокальность фотоионизации описывается ядром, нормированным на единицу:

$$F(r) = \frac{\exp(-r/\Lambda_2) - \exp(-r/\Lambda_1)}{4\pi r^3 \ln(\Lambda_2/\Lambda_1)}, \quad \Lambda_2 \approx 2 \text{ мм}, \quad \Lambda_1 \approx 35 \text{ мкм}. \quad (2)$$

Коэффициент C характеризует эффективность фотоионизации; $C \approx 0,01$ на уровне моря и зависит от плотности воздуха. Данная система решалась в работе [22].

Далее для упрощения задачи мы оставляем только процессы, важные для описания стримера, и пренебрегаем нелокальными эффектами транспорта электронов, электронной диффузией, движением ионов, отлипанием электронов, рекомбинацией и межиионными процессами; затем упрощаем эти уравнения для специфической системы электрод–разряд и формы ионизационного фронта, показанных на рис. 2. Данная система параметризуется конечным, или, по крайней мере, сильно ограниченным по сравнению с системой (1) набором параметров.

На схеме рис. 2 ось симметрии параллельна внешнему постоянному полю \mathbf{E}_e . Стример соприкасается с перпендикулярным идеально проводящим электродом, который на занимаемой стримером поверхности поглощает электроны в случае положительного стримера и является идеальным источником электронов для отрицательного¹. Стример полной длины L состоит из головки (полусферы радиуса a), присоединённой к каналу (цилиндру того же радиуса). Во внутренней части есть однородное поле канала \mathbf{E}_s , которое меньше внешнего. Концентрация электронов n положительна внутри стримера и спадает до $n = 0$ снаружи, причём на передней его границе этот спад резкий, с масштабом толщины фронта $d \ll a$. Внутри канала мы предполагаем однородность n вдоль оси (но n может плавно спадать к стенкам), где её значение обозначаем n_s . Предположение однородности \mathbf{E}_s и n_s , возможно, даёт наибольшую ошибку в описываемой модели, порядка нескольких десятков процентов, т. к. в канале происходит уменьшение n в результате прилипания электронов, которым мы в описываемой модели пренебрегаем.

Стример растёт (распространяется) вдоль оси x со скоростью $V \equiv dL/dt$. Мы предполагаем, что головка находится в стационарном состоянии в движущейся системе отсчёта, связанной с ней, что позволяет записать уравнения, используя бегущую координату $\xi = x - Vt$. За начало

¹ Электродные процессы — предмет дальнейших исследований.

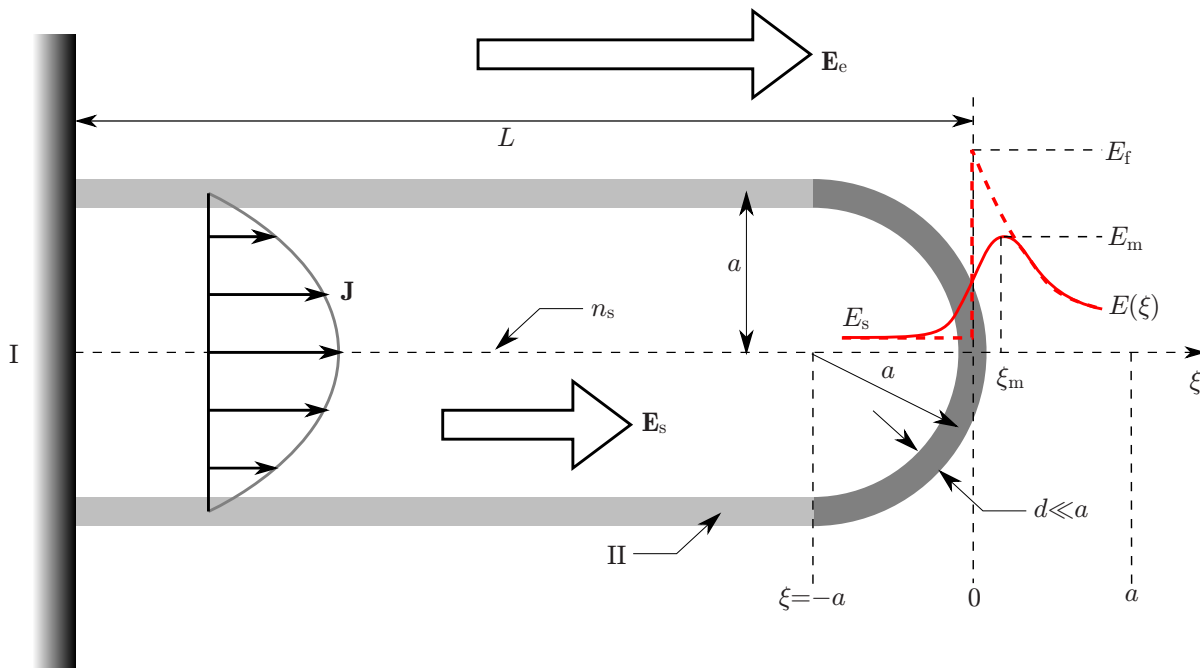


Рис. 2. Модель стримера: I — идеально проводящая плоскость, II — положительно заряженная поверхность. Направления полей показаны для положительного стримера (для отрицательного они будут противоположными). Сплошной красной линией схематически показана зависимость $E(\xi)$ для стримера с конечной толщиной ионизационного фронта d , пунктирной — с бесконечно тонким фронтом ($d = 0$)

отсчёта ξ удобно принять какую-нибудь точку внутри передней границы стримера, как показано на рис. 2. Стример распространяется, ионизируя воздух впереди себя высоким электрическим полем с максимальным значением E_m (поле схематически показано сплошной красной линией на рис. 2).

Кроме E_m , полезно также ввести ещё одно поле E_f , которое стример создавал бы, если бы ионизационный фронт был бесконечно тонким ($d = 0$), при той же поверхностной плотности зарядов на границе стримера (распределение такого поля показано штриховой красной линией на рис. 2). Моделирование показывает, что $E_m/E_f \approx 0,70 \div 0,85$. Примерно такое же поле E_f мы получаем в случае плоского фронта, рассмотренного в разделе 3.3. Для нахождения соотношений между параметрами стримера и последующих практических вычислений удобнее в качестве одного из параметров выбрать E_f , а значение E_m можно вычислить потом, зная E_f и толщину d .

Таким образом, мы выбрали несколько параметров (a, V, E_s, E_f и n_s), которые полностью (хотя и приблизительно) описывают нашу систему. Подчеркнём, что E_e и L являются заданными величинами: E_e определяется лабораторными условиями, а $L = \int V dt$ — предыдущей историей распространения стримера. В следующем разделе мы запишем уравнения, связывающие эти параметры друг с другом.

Надо упомянуть, что это не первая попытка подобного описания. Параметрическая модель была рассмотрена, например, в работе [24]. Но из-за сложности формул в таких моделях трудно заметить внутренние противоречия (переопределённость системы уравнений) и недостаточность системы (зависимые уравнения).

3. СИСТЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Мы выделили следующие соотношения между параметрами.

1) Соотношение между полями E_s , E_e , E_f (E_m), которое определяется электростатикой, и может быть вычислено методом моментов, если мы предположим, что все заряды приблизительно сконцентрированы на поверхности стримера (т. е. пренебрегаем толщиной фронта d).

2) Непрерывность полного тока на конце стримера: ток проводимости в канале превращается в ток смещения снаружи.

3) Баланс времени ионизации и времени релаксации в канале.

4) Баланс между процессами ударной ионизации и фотоионизации [25].

Рассмотрим каждое из них детально.

3.1. Уравнение 1. Поля

Внешнее однородное постоянное поле E_e задано лабораторными условиями. Внутри канала проводимость высока, и есть поле E_s , такое что $0 < E_s < E_e$. Поле на передней границе можно оценить из соображений, приведённых в [7, с. 78]: потенциал на конце стримера отличается от невозмущённого на $\Delta U = L(E_e - E_s)$, и поле приблизительно равно $E_f = \Delta U/a$. Точнее поле E_f можно найти методом моментов [26, гл. 2].

Поле впереди стримера спадает приблизительно как

$$E(\xi) = E_e + \frac{E_f - E_e}{1 + \xi/\ell}, \quad d \lesssim \xi < a, \quad (3)$$

где $\ell \approx (0,3 \div 0,4) a$ — ширина распределения поля [21]. В разделе 3.6 дана приближённая формула для ℓ , найденная при помощи метода моментов.

3.2. Уравнение 2. Непрерывность тока

Вдоль стримерного канала течёт ток проводимости, плотность которого на оси равна $J_c = en_s \mu(E_s) E_s$. Концентрация электронов резко (с масштабом толщины фронта $d \ll a$) спадает до нуля на передней границе стримера. При этом плотность полного тока $J = J_c + J_d$, состоящего из тока проводимости J_c и тока смещения $J_d = \varepsilon_0 \partial E / \partial t$, должна остаться приблизительно постоянной ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ из уравнения Максвелла, ε_0 — электрическая постоянная). Используя свойство бегущей координаты $\partial E / \partial t = -V \partial E / \partial \xi$ и выражения для поля (3), находим

$$J_d(\xi) = \frac{\varepsilon_0 V (E_f - E_e)}{\ell (1 + \xi/\ell)^2}.$$

При малых $\xi \sim d$, пренебрегая $d \ll \ell$ и приравнявая это выражение к току проводимости в канале, получаем уравнение для непрерывности тока [27].

Полный ток J приблизительно состоит из J_d при $\xi > 0$ и $J_c = J_d(0)$ при $\xi < 0$.

Отметим, что для J_d квадратично спадает с расстоянием. Физически это можно интерпретировать как изотропное радиальное расхождение тока смещения от кончика стримера. Полный расходящийся ток смещения должен быть равен полному току внутри канала стримера. Также стоит заметить, что внутри переднего ионизационного фронта стримера ток проводимости и ток смещения очень сильно варьируются, намного превышая значение полного тока (их суммы).

3.3. Уравнение 3. Ионизационный фронт

Гидродинамические уравнения (1) можно переписать в виде

$$\epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = e v n + \mathbf{J}, \quad \partial_t n + \nabla \cdot (v n) = \nu_t n + s_p. \tag{4}$$

Здесь и далее оператор $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\alpha$. Пренебрегая фотоионизацией s_p , для плоского стационарного фронта, движущегося со скоростью $V > 0$, получаем одномерные уравнения ($\partial/\partial y, \partial/\partial z \equiv 0$):

$$-\epsilon_0 V \partial_\xi E = -e v n, \quad -\partial_\xi ([V \pm v] n) = \nu_t n,$$

где $v = |v_x| = \mp v_x$ (верхний знак для положительного, нижний для отрицательного фронта). Ток $J = \text{const} = 0$, поскольку он отсутствует далеко впереди фронта ($\xi \rightarrow +\infty$), там, где поле постоянно и равно внешнему $E_f = E(\xi \rightarrow +\infty)$. Из $J = 0$ следует также, что $E = 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$: этим плоский фронт отличается от стримера, в котором $J > 0$ и $E(-\infty) = E_s > 0$. Поделим уравнения одно на другое:

$$\frac{e}{\epsilon_0} \frac{d}{dE} \left[\frac{(V \pm v)n}{V} \right] = \frac{\nu_t}{v} \equiv \alpha_t(E).$$

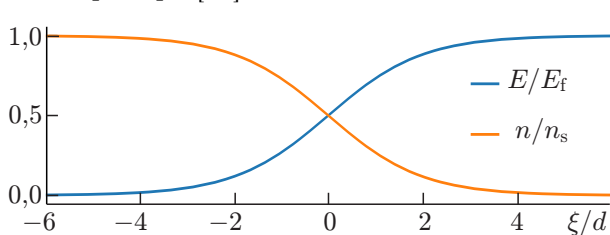
Интегрируя, получим

$$\frac{en(E)}{\epsilon_0} = \frac{V}{V \pm v} \int_E^{E_f} \alpha_t(E) dE. \tag{5}$$

Здесь α_t — эффективный коэффициент Таунсенда. Частота максвелловской релаксации далеко позади фронта (там, где $E = 0$):

$$\tau_M^{-1} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} = \frac{en_s \mu_0}{\epsilon_0} = \mu_0 \int_0^{E_f} \frac{\nu_t(E)}{\mu E} dE \sim \nu_t(E_f),$$

где $\mu_0 = \mu(E = 0)$ и $n_s = n(E = 0)$ — концентрация электронов позади фронта, при $\xi \rightarrow -\infty$. Последнее выражение описывает приблизительный баланс времени ионизации и времени релаксации, что можно интерпретировать как критерий устойчивости распространения фронта или стримера [28].



Подставив найденную $n(E)$ в одно из уравнений, можно найти пространственную форму $n(\xi), E(\xi)$. Например, для $\nu_t(E) = KE, v = 0$ форма имеет вид сигмоида с шириной $d = V/\nu_t(E_f)$, показанного на рис. 3, т.е. $n(\xi) = n_s[1 - S(\xi)], E(\xi) = E_f S(\xi)$, где

Рис. 3. Решение $n(\xi), E(\xi)$ для плоского ионизационного фронта для случая $\nu_t(E) = KE, \mu = 0$

$$S(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(-\xi/d)}. \tag{6}$$

Можно найти скорость плоского фронта V из граничных условий при $\xi \rightarrow \infty$ (впереди фронта) для разных механизмов его распространения. Возможные значения V удовлетворяют неравенству $V > V_0$, где V_0 определяется по одной из следующих формул.

1) Если $\mu > 0, D > 0$, то

$$V_0 = \mp \mu(E_f) E_f + \sqrt{2D\nu_t(E_f)}$$

(формула Колмогорова—Петровского—Пискунова [29, с. 77]).

2) Если есть фотоионизация, но $D = 0$ [29, уравнение (3.1.85)]:

$$V_0 = \mp \mu(E_f)E_f + \nu_t(E_f)\Lambda_{\max}.$$

Здесь и далее верхний знак относится к положительному, а нижний — к отрицательному ионизационному фронту. К сожалению, эти выражения действительны только для плоского фронта и неприменимы к стримерам. Также, забегая немного вперёд, скажем, что для стримера V определяется однозначно, а не в виде неравенства.

Приведённые выражения теории плоского ионизационного фронта можно найти в отличном подробном обзоре [29].

3.4. Уравнение 4. Фотоионизационный баланс

Рассмотрим баланс между двумя процессами: фотоионизацией (вызванной летящими вперёд фотонами) и ударной ионизацией (вызванной идущими назад лавинами).

Источником фотонов является передний фронт стримера, где происходит активная ионизация. В нашей модели примем, что эта активная область в пространстве имеет приблизительно форму диска с радиусом $a_{\text{ph}} \sim a$. Для расчётов, приведённых в статье, мы взяли $a_{\text{ph}} = a/2$, но результаты мало меняются, если использовать, например, $a_{\text{ph}} = a$. Число фотонов пропорционально числу созданных в результате ионизации электронов, т.е. концентрации электронов в канале стримера n_s . Фотоны летят вперёд и создают затравки для лавин на расстоянии $\xi_p \sim a_{\text{ph}}$ впереди фронта с концентрацией n_p ².

Результирующие лавины экспоненциально растут в пространстве в направлении назад, к стримеру, но не с обычным таунсендовским коэффициентом $\alpha_t = \nu_t/v$, а с «доплеровски смещённым» коэффициентом $\alpha_{\text{eff}} = \nu_t/(V \pm v)$. Обратная к α_{eff} величина — это толщина фронта $d = (V \pm v)/\nu_t$. Подчеркнём, что, поскольку скорость стримера V превышает скорость дрейфа электронов v , знак величины d положительный (т.е., лавины идут назад к стримеру в системе отсчёта, связанной с его головкой) не только для положительных стримеров (верхний знак), но и для отрицательных стримеров (нижний знак).

В статье [30] была впервые приведена формула, связывающая скорость стримера с его радиусом: из экспоненциального роста получаем $\ln(n_s/n_p) = \alpha_{\text{eff}}a$, откуда

$$V \pm v = \frac{a\nu_t(E_f)}{\ln(n_s/n_p)}.$$

Остаётся неизвестным значение $\ln(n_s/n_p)$, которое можно взять приблизительно равным 8 [21]. Рассмотрев строго второе уравнение системы (4), можно вывести более точное выражение [25], которое приведено в разделе 3.6 (правда, в несколько изменённом виде, поскольку мы взяли определённую пространственную форму источника фотонов в форме диска). Из этого уравнения получается, в частности, и приведённая оценка важной для фотоионизации области ξ_p .

3.5. Обсуждение используемых приближений

3.5.1. Форма стримера

Мы предположили, что радиус канала стримера постоянен на всём его протяжении и равен радиусу головки. Однако радиус канала стримера может отличаться от радиуса кривизны го-

² Конечно же, фотоны летят во все стороны, но указанная область является самой важной: там высокое поле и до прибытия фотонов не было свободных электронов.

ловки. Например, гидродинамические вычисления [31] показали, что он больше в два раза для положительных стримеров и в три или более раз для отрицательных стримеров. Если $E_s = \text{const}$, то вариации радиуса канала вдали от головки не сильно повлияют на поле впереди стримера, $E(\xi > 0)$, т.к. оно формируется в основном поверхностными зарядами вблизи вершины. Таким образом, параметр a , который входит в наши уравнения, лучше описывает радиус кривизны головки, чем, например, максимальный радиус канала.

3.5.2. Неоднородность n_s и E_s вдоль канала

В выражении (3) мы предположили, что поле внутри канала $E_s = \text{const}$. Непрерывность тока вдоль канала требует, чтобы $n_s v(E_s) = \text{const}$, что вместе с $E_s = \text{const}$ будет означать также, что $n_s = \text{const}$. Предположение об однородности E_s and n_s вдоль канала, однако, будет недействительным, если мы включим в рассмотрение процессы прилипания и рекомбинации в канале (мы затрагиваем эту тему в разделе 6). Однако, даже если мы пренебрежём этими процессами, неоднородность n_s может быть вызвана историей развития стримера: разные части канала были созданы при разных условиях (длине канала) и, следовательно, могут иметь разные локальные значения n_s ³. Забегая вперёд, на рис. 5d и 6d мы видим, что n_s может сильно меняться с ростом стримера. Ошибка, связанная с заменой неоднородного значения n_s в канале значением из последнего добавленного участка стримера, может быть порядка нескольких десятков процентов и, возможно, является самым большим вкладом в полную ошибку в представленных вычислениях.

3.5.3. Кривизна головки и конечный ток $J \neq 0$ через фронт

Выражение (5), связывающее концентрацию электронов в ионизационном фронте и канале стримера с полем впереди стримера, изменится, если мы подставим выражение для J , найденное в разделе 3.2, в выражение (4). Решение полученного уравнения выходит за рамки данной статьи и заслуживает отдельного обсуждения. В частности, мы получим выражение для поля, отличающееся от (3) внутри фронта, при $|\xi| \lesssim d$, (представлено сплошной красной кривой на рис. 2). Если плавный переход от поля $E(\xi) = E_s$ при $\xi \lesssim -d$ к выражению (3) при $\xi \gtrsim d$ приблизительно описывается сигмоидной кривой (6), то максимальное поле E_m будет равно

$$E_m = E_f \left[1 - \frac{d}{\ell} \ln \left(\frac{\ell}{d} \right) \right].$$

Оно меньше E_f и достигается при $\xi = \xi_m = d \ln(\ell/d)$. Для оценки относительной ошибки в выражении для n_s необходимо провести дополнительные вычисления. В отличие от $E(-\infty) = 0$ для плоского фронта, здесь мы имеем $E(\xi \lesssim -d) = E_s > 0$, что, как минимум, даёт другой нижний предел в интеграле в выражении (5). Таким образом, формула (5) будет приближённой, но останется верной по порядку величины.

3.6. Система алгебраических уравнений для a, V, E_s, E_f и n_s

В этом разделе мы собрали все уравнения для удобства читателя.

1) Соотношение между электрическими полями, задаваемое электростатическим распределением заряда на поверхности стримера (аналитическое приближение результатов метода моментов)

³ Дрейфом электронов внутри канала можно пренебречь по сравнению со скоростью стримера, $v(E_s) \ll V$.

[7, с. 78] (связь между E_s и E_f):

$$E(\xi) \approx [2 + 0,56(2L/a)^{0,92}] \frac{E_e - E_s}{1 + \xi/\ell} + E_e, \quad E_f = E(0), \quad \frac{\ell}{a} \approx 0,40 - \frac{0,59}{(L/a) + 2,31},$$

ℓ — ширина распределения электрического поля [21].

2) Непрерывность полного электрического тока через фронт стримера [27] (связь между E_s , n_s и V):

$$J_c = \varepsilon_0 \left. \frac{\partial E}{\partial t} \right|_{\xi=0} \implies en_s v(E_s) = \frac{\varepsilon_0 V (E_f - E_e)}{\ell},$$

v — дрейфовая скорость электронов.

3) Критерий устойчивости распространения стримера, следующий из теории плоского ионизационного фронта [29, гл. 3] (связь между n_s и E_f):

$$n_s = \frac{\varepsilon_0}{e} \int_0^{E_f} \frac{\nu_t(E')}{v(E')} dE',$$

где ν_t — эффективная частота ионизации. Это соотношение приблизительно эквивалентно $\tau_M \sim \tau_{\text{ion}} = 1/\nu_t(E_f)$.

4) Связь скорости и радиуса, определяемая фотоионизацией [25, уравнение 17] (связь между V , E_f и a):

$$\int_0^\infty S_{\text{ph}}(\xi) \exp \left[\int_0^\xi \frac{\nu_t(E) d\xi'}{V \pm v(E)} \right] d\xi = 1,$$

S_{ph} — источник фотоионизационных электронов на единицу n_s , создаваемый процессами, происходящими во фронте радиуса $a_{\text{ph}} = a/2$:

$$S_{\text{ph}}(\xi) = \int_{r_\perp < a_{\text{ph}}} CF(r) d^2 \mathbf{r}_\perp, \quad r = \sqrt{\xi^2 + r_\perp^2},$$

где $F(r)$ задано уравнением (2).

4. ДИСПЕРСИОННАЯ ФУНКЦИЯ

При рассмотрении полученной системы мы замечаем, что при фиксированных внешних условиях E_e и L она не имеет однозначного решения, поскольку число уравнений на одно меньше, чем число параметров. Таким образом, остаётся один свободный параметр, в качестве которого можно выбрать, например, радиус a . Таким образом, у нас получается решение $V = V(a)$, $E_s = E_s(a)$ и т. д.

Рассмотрим аналогию с другой (но похожей по целям) задачей: нахождение малых возмущений плоского ионизационного фронта. Эта задача (правда, только с электронным дрейфом и диффузией, но без фотоионизации) была подробно рассмотрена в работе [32]. Было найдено, что в линейном приближении существует неустойчивость: малые возмущения, пропорциональные $\cos(ky)$ растут как $\exp(st)$ с инкрементом s , который является функцией поперечного волнового числа k . Функцию $s(k)$ называют дисперсионной функцией. При решении задачи о росте малых возмущений очевидно, что поперечный масштаб k — это свободный параметр. Это объясняет то, что и в нашей задаче о длинном стримере, хотя она и нелинейная, поперечный размер тоже

оказался свободным параметром. Совокупность различных параметров малого гармонического возмущения (например, приращение поля на выступах в зависимости от амплитуды и т. п.) можно назвать «модой» (аналогично электромагнитной моде в волноводе), и по аналогии совокупность параметров $\{V(a), E_s(a), \dots\}$ при фиксированном радиусе a мы тоже назовём стримерной модой.

Эволюция малых возмущений плоского фронта зависит от начальных условий. Если в начале есть комбинация возмущений с разными k , то возмущение, отвечающее максимуму дисперсионной функции $s(k)$, растёт быстрее всего и в конечном счёте только оно «выживает», т. е. по прошествии некоторого времени мы будем видеть лишь возмущение, пропорциональное $\cos(k^*y)$, где $\max_k s(k) = s(k^*)$. Это решение (и масштаб k^*) является предпочтительным как наиболее неустойчивое. Мы можем предположить, что и в нашем случае есть предпочтительное наиболее неустойчивое решение, которое и определяет действительный радиус стримера и все его параметры. Нахождение такого решения осложняется тем, что задача нелинейная и нет инкремента $s(k)$. Найти подходящую аналогию помогут следующие рассуждения.

В линейных гармонических возмущениях плоского фронта величина выступа L (мы используем это обозначение, поскольку величина выступа аналогична длине стримера в нашей задаче) растёт как $L = L_0 \exp[s(k)t]$, и скорость выступов (относительно общей скорости фронта) $V = dL/dt = s(k)L$. Таким образом, скорость играет ту же роль, что и $s(k)$ при фиксированном L . Поэтому мы можем назвать найденную зависимость $V(a)$ дисперсионной функцией стримера. Наиболее неустойчивое (предпочтительное) решение таким образом будет отвечать $a = a^*$, где $\max_a V(a) = V(a^*)$. Это решение будет предпочтительной модой, которая и будет определять действительные параметры стримера, полученные в лабораторных и численных экспериментах.

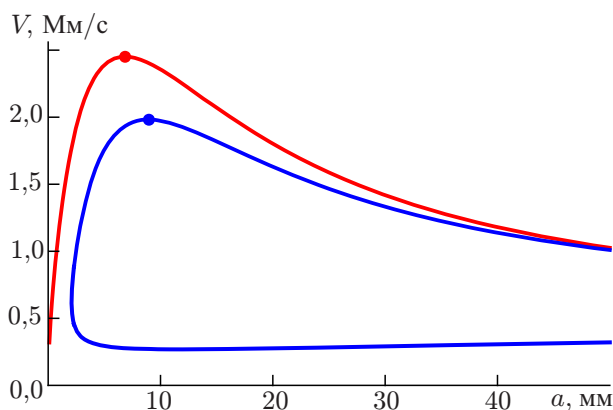


Рис. 4. Пример найденных дисперсионных функций $V(a)$ для стримеров в сухом воздухе на уровне моря при внешнем поле $E_e = 1,5$ МВ/м и длине стримера $L = 80$ мм. Для положительных (красная кривая) стримеров для всех a существует одно решение, для отрицательных (синяя кривая) — ноль или два. Большой точкой обозначен максимум V

вычислений сильно зависят от его выбора. Предлагаемый алгоритм позволит выбрать более физическое, т. е. непостоянное, значение радиуса.

Пример вычисленных дисперсионных функций для обеих полярностей стримеров приведён на рис. 4. Жирной точкой обозначена предпочтительная мода, т. е. действительные скорости и радиусы стримеров.

Наше предположение о том, что мода с максимальной скоростью определяет параметры наблюдаемого в природе стримера, является эвристическим, и мы пока не можем найти его строгого математического обоснования, т. к. рассматриваемые моды нелинейны и нельзя получить их комбинации, как это было в случае линейной задачи о малых возмущениях плоского фронта. Заметим, что в работе [33, рис. 1] тоже указывалось (на эвристическом уровне), что, когда стример меняет радиус на более соответствующий физическим условиям, его скорость может увеличиться. Однако для численного решения максимизацию скорости эти авторы не использовали.

Выбор предпочтительного радиуса из соображений максимизации скорости может быть использован в одномерных моделях стримеров, таких как рассмотренная в статье [34]. В этой модели использовалось предположение постоянного радиуса, и авторы отметили, что результаты

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Расчёты были проведены для стримеров в сухом воздухе на уровне моря. Для электронной подвижности и частот ионизации и прилипания, мы используем выражения, взятые из работ [8, 35]. Вычисления были проведены для длин стримеров в интервале $L = 5 \div 200$ мм с шагом 5 мм и для внешних полей в интервале $E_e = 0,1 \div 3$ МВ/м с шагом 0,05 МВ/м. Обычно у нас получалась одна ветвь для дисперсионной функции для положительных стримеров и две для отрицательных, как показано на рис. 4. Верхняя ветвь $V(a)$ всегда имела один локальный максимум, в то

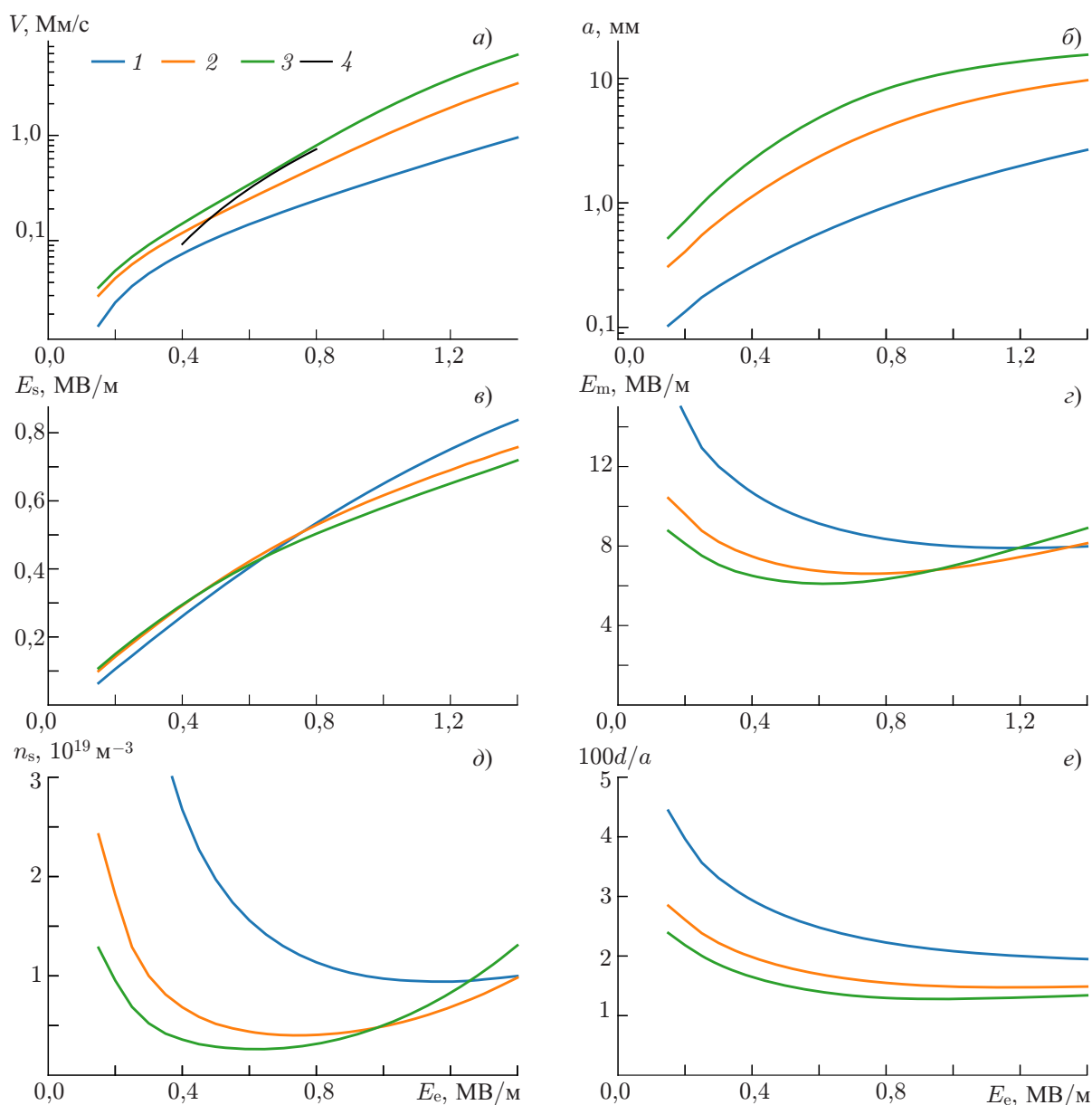


Рис. 5. Результаты вычислений для положительных стримеров как функции внешнего поля E_e для трёх разных значений длины стримера $L = 40$ (кривые 1); 120 (2) и 200 мм (3): скорость V (а), радиус a (б), поле внутри канала стримера E_s (в), максимальное поле E_m (г), концентрация электронов внутри канала n_s (д), толщина фронта d как доля радиуса a в процентах (е). Результаты лабораторных измерений скорости V [1, рис. 10] при $L = 120$ мм также представлены (а, кривая 4)

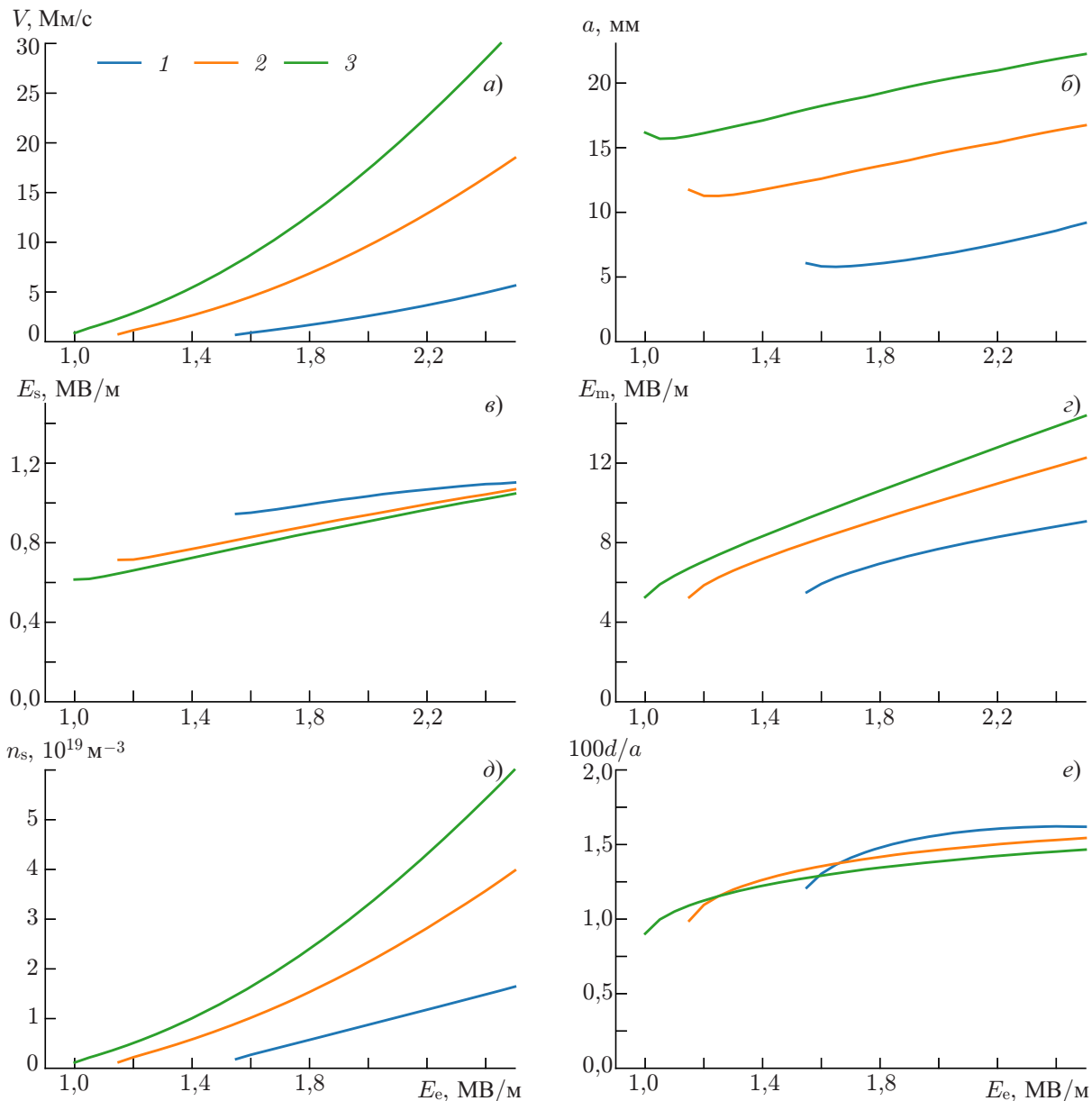


Рис. 6. Результаты вычислений для отрицательных стримеров как функции внешнего поля E_e для трёх разных значений длины стримера $L = 40$ (кривые 1); 120 (2) и 200 мм (3): скорость V (а), радиус a (б), поле внутри канала стримера E_s (в), максимальное поле E_m (г), концентрация электронов внутри канала n_s (д), толщина фронта d как доля радиуса a в процентах (е)

время как все остальные вычисленные параметры (E_s , E_m , n_s) были монотонными функциями a . Приведённые ниже результаты отвечают максимуму $V(a)$, т. е. наиболее неустойчивому решению (предпочтительной моде).

Результаты для положительных стримеров представлены на рис. 5. Скорость приведена в сравнении с лабораторными измерениями [1], которые проводились в условиях, очень сходных с принятыми в нашей модели (т. е. при приблизительно постоянном и однородном поле). Удобной единицей для скорости стримера является $1 \text{ Мм/с} = 10^6 \text{ м/с} = 1 \text{ мм/нс}$. Мы также получаем хорошее согласие (в пределах около 30 %) с численным экспериментом, воспроизводящим

решение гидродинамических уравнений [12] (результаты здесь не приведены).

Результаты для отрицательных стримеров представлены на рис. 6. Некоторые графики имеют совершенно другой вид, чем в случае положительных стримеров. В частности, решение начинается только с конечного E_e (для фиксированного L).

6. ПОРОГОВЫЕ ПОЛЯ

Прилипание и рекомбинация в стримерном канале снижают его проводимость, что приводит к электрическому отсоединению стримера от электрода, т. е. к прерыванию электрической цепи. Ток через стример прекращается, и, предположительно, он останавливается. Таким образом, этот механизм определяет пороговое поле для положительных стримеров.

Надо заметить, что есть гипотезы, что стример может существовать отдельно от электрода. Например, в [36, рис. 22b] описывается униполярный стримерный солитон с «зоной компенсации» позади стримера, в которой проводимость и линейный заряд плавно спадают до нуля.

Поле канала гораздо ниже поля пересечения E_k . При таких полях главную роль играет трёхкомпонентное прилипание (для вычислений взятое из работы [8]). Концентрация электронов снижается на фактор $K = \exp(-L/L_{att})$, где характерный пространственный масштаб вдоль канала, на котором происходит прилипание,

$$L_{att} = \frac{V \pm v(E_s)}{\nu_a(E_s) - \nu_i(E_s)}.$$

Поля, которые отвечают заданному фактору K , построены на рис. 7 для разных длин стримера. Для сравнения, приведены экспериментальные данные для порогового поля E_{+t} , полученные в работе [1]. Снижение концентрации электронов, наиболее хорошо моделирующее экспериментальные данные, довольно сильное, $K \approx 10^{-5}$. Возможно, отлипание, которым мы пренебрегли, уменьшает роль прилипания, и замедляет снижение концентрации электронов.

Механизм возникновения порогового поля для отрицательных стримеров совершенно другой. Как мы видели на рис. 6, решение исчезает при низких значениях внешнего поля E_e . Величины E_{-t} , при которых это происходит, также построены на рис. 7 и находятся в согласии с экспериментальными значениями $E_{-t} = 0,75 \div 1,25$ МВ/м [9, с. 362].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано следующее.

- 1) Стримерный разряд в поле E_e с длиной L можно описать системой алгебраических уравнений, при решении которых получаются «моды» для разных радиусов a .
- 2) Максимизируя скорость фронта V , получаем предпочтительное решение, которое только и реализуется физически.

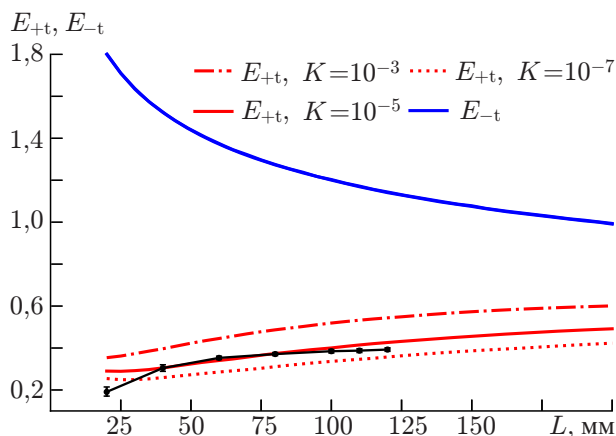


Рис. 7. Пороговые поля E_{+t} и E_{-t} для положительных и отрицательных стримеров как функции длины L . Экспериментальные данные (чёрная кривая) взяты из [1, рис. 4]

3) Вычисленные параметры стримера согласуются с экспериментальными результатами и гидродинамическими моделями.

4) Пороговые поля являются функциями длины стримера L , причём для положительных и отрицательных стримеров они имеют разные физические причины. Порог для отрицательных стримеров совместим с экспериментальным значением $E_{-t} \approx 0,75 \div 1,25$ МВ/м [9, с. 362], а для положительных стримеров порог в нашей модели совместим с экспериментальным значением $E_{+t} \approx 0,45$ МВ/м только при заниженном значении коэффициента прилипания.

Работа выполнена при поддержке Европейского Исследовательского Совета в рамках программы Европейского Союза Seventh Framework (FP7/2007-2013)/ERC, соглашение о гранте № 320839, и Исследовательского Совета Норвегии в рамках контрактов 208028/F50, 216872/F50 и 223252/F50 (CoE).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Компьютерная программа на языке Python3, при помощи которой можно выполнить описанные здесь вычисления, и инструкции к ней могут быть найдены по адресу https://gitlab.com/nleht/streamer_parameters. Пример решения системы (2) в работе [22], в котором показано столкновение стримеров с противоположными полярностями, можно найти на видео по адресу <https://www.youtube.com/watch?v=xbaDeLYERkQ>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Allen N. L., Mikropoulos P. N. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1999. V. 32, No. 8. P. 913. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/8/012>
2. Kochkin P. O., van Deursen A. P. J., Ebert U. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2014. V. 47, No. 14. Art. no. 145203. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/14/145203>
3. Loeb L. B., Meek J. M. The mechanism of the electric spark. Stanford : Stanford University Press, 1941. 188 p.
4. Fishman G. J., Bhat P. N., Malozzi R., et al. // Science. 1994. V. 264. P. 1313–1316. <https://doi.org/10.1126/science.264.5163.1313>
5. Kochkin P. O., Nguyen C. V., van Deursen A. P. J., Ebert U. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2012. V. 45, No. 42. Art. no. 425202. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/42/425202>
6. Kochkin P. O., van Deursen A. P. J., Ebert U. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2015. V. 48, No. 2. Art. no. 025205. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/48/2/025205>
7. Bazelyan E. M., Raizer Y. P. Spark discharge. New York : CRC Press, 1998. 312 p.
8. Morrow R., Lowke J. J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1997. V. 30, No. 4. P. 614–627. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/30/4/017>
9. Raizer Y. P. Gas discharge physics. Berlin : Springer, 1991. 449 p.
10. Teunissen J., Ebert U. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2017. V. 50. Art. no. 474001. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aa8faf>
11. Chanrion O., Neubert T. // J. Comput. Phys. 2008. V. 227, No. 15. P. 7222–7245. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.04.016>
12. Bagheri B., Teunissen J., Ebert U., et al. // Plasma Sources Sci. Technol. 2018. V. 27, No. 9. Art. no. 095002. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/aad768>

13. Pasko V.P. // NATO Science Ser. II: Mathematics, Physics and Chemistry, V. 225. Sprites, Elves and Intense Lightning Discharges / ed. by M. Fullekrug, E. A. Mareev, and M. J. Rycroft. Dordrecht : Springer Netherlands, 2006. P. 253–311.
14. Ebert U., Sentman D.D. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2008. V. 41, No. 23. Art. no. 230301. <http://stacks.iop.org/0022-3727/41/i=23/a=230301>
15. Dawson G.A., Winn W.P. // Z. Phys. 1965. V. 183, No. 2. P. 159–171. <https://doi.org/10.1007/BF01380792>
16. Gallimberti I. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1972. V. 5. P. 2179. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/5/12/307>
17. Qin J., Pasko V.P. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2014. V. 47. Art. no. 435202. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/43/435202>
18. Chen S., Zeng R., Zhuang C. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. V. 46, No. 37. Art. no. 375203. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/46/37/375203>
19. Yi W.J., Williams P.F. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2002. V. 35, No. 3. P. 205–218. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/35/3/308>
20. Briels T.M.P., Kos J., Winands G.J.J., et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2008. V. 41, No. 23. Art. no. 234004. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/41/23/234004>
21. Naidis G.V. // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. Art. no. 057401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.057401>
22. Lehtinen N.G., Østgaard N. // J. Geophys. Res. 2018. V. 123. P. 6935–6953. <https://doi.org/10.1029/2018JD028646>
23. Железняк М. Б., Мнацаканян А. Х., Сизых С. В. // Теплофизика высоких температур. 1982. Т. 20, № 3. С. 423–428.
24. Дьяконов М. И., Качоровский В. Ю. // Журн. эксперим. теорет. физ. 1989. Т. 95, № 5. С. 1850–1859.
25. Pancheshnyi S.V., Starikovskaia S.M., Starikovskii A.Y. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. V. 34, No. 1. P. 105–115. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/34/1/317>
26. Harrington R.F. Field computation by moment methods. New York : IEEE Press, 1993. 240 p.
27. Babaeva N.Y., Naidis G.V. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1997. V. 25, No. 2. P. 375–379. <https://doi.org/10.1109/27.602514>
28. Pasko V.P., Inan U.S., Bell T.F. // Geophys. Res. Lett. 1998. V. 25, No. 12. P. 2123–2126. <https://doi.org/10.1029/98GL01242>
29. Lagarkov A.N., Rutkevich I.M. Ionization waves in electrical breakdown of gases. New York : Springer-Verlag, 1994. 232 p.
30. Loeb L.B. // Science. 1965. V. 148, No. 3676. P. 1417–1426. <https://doi.org/10.1126/science.148.3676.1417>
31. Starikovskiy A.Y., Aleksandrov N.L. // Plasma Sources Science and Technology. 2020. V. 29, No. 7. Art. no. 075004. <https://doi.org/10.1088/1361-6595/ab9484>
32. Derks G., Ebert U., Meulenbroek B. // J. Nonlinear Sci. 2008. V. 18, No. 5. P. 551. <https://doi.org/10.1007/s00332-008-9023-0>
33. Дьяконов М. И., Качоровский В. Ю. // Журн. эксперим. теорет. физ. 1989. Т. 94, № 5. С. 321–332.
34. Aleksandrov N.L., Bazelyan E.M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1996. V. 29, No. 3. P. 740–752. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/29/3/035>
35. Pasko V.P. Dynamic coupling of quasi-electrostatic thundercloud fields to the mesosphere and lower ionosphere: Sprites and Jets : Ph.D. thesis. Stanford University, 1996. 141 p.

36. Gallimberti I. // J. Phys. Colloques. 1979. V. 40, No. C7. P. 193–250.
<https://doi.org/10.1051/jphyscol:19797440>

Поступила в редакцию 29 мая 2020 г.; принята в печать 28 января 2021 г.

PHYSICS AND MATHEMATICS OF ELECTRIC STREAMERS

N. G. Lehtinen

A streamer is a kind of electric discharge in which there forms a column of ionized matter growing due to amplified field at its tip. Streamers in air are an important stage of spark discharge, in particular lightning, and constitute sprites (mesospheric discharges). Streamers in large discharges (in sprites, in laboratory experiments with a meter-scale inter-electrode gap and megavolt potential difference, and in lightning) create large branched structures. Microscopic processes, which are responsible for propagation of streamers, are: ionization, attachment, electron drift and diffusion, photoionization, ion processes (detachment, recombination, etc.). Their numerical modeling reproduces the columnar shape of the ionization front, but does not allow to identify the physical and mathematical mechanisms of how the streamer radius and speed are chosen and of branching. A streamer may be described by a finite set of parameters, such as its speed and the radius of its head. The relations between these parameters are known, but do not constitute a complete set of equations: one free parameter (the radius) remains, which defines a streamer “mode” (terminology is chosen by analogy with small transverse harmonic perturbations of a flat ionization front). As an additional requirement which would give a unique solution, we propose the choice of the most unstable mode that has the maximum speed. Thus, we treat the streamer as a nonlinear instability. This approach produces results which agree with experimental measurements of streamer speeds, as well as of the streamer propagation threshold field.

This article is prepared based on material of a lecture presented at the XIX Scientific School “Nonlinear Waves.”